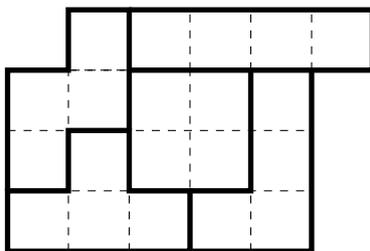


7.1. Вера разрежала изображённую ниже фигуру по линиям сетки на 5 частей равной площади. Оказалось, что среди этих частей нет одинаковых. Приведите пример, как такое могло быть. (Достаточно привести один пример. Напомним, что фигуры являются одинаковыми, если их можно совместить наложением.)

Решение. Пример разрезания изображён ниже.



Догадаться до него можно было, заметив, что площадь всей фигуры 20 клеток, значит, площадь каждого клетчатого многоугольника равна 4. Всего существует ровно 5 различных таких многоугольников, и все они в разрезании должны быть.

Критерии. Любой верный пример — 7 баллов.

Замечено только, что площадь фигур должна быть равна 4 — 1 балл.

Замечено только, какие 5 фигур должны быть в разрезании — 3 балла (не складывается с предыдущим пунктом).

7.2. На заборе была написана обыкновенная дробь. Никита, шедший мимо, прибавил к знаменателю числитель и записал новую дробь вместо старой. Егор, шедший следом, добавил к числителю знаменатель и тоже записал новую дробь вместо старой. Наконец, Иннокентий вновь прибавил к знаменателю числитель и заменил на заборе дробь на новую. Что было написано на заборе изначально, если в конце получилась дробь $\frac{63}{106}$? (Найдите все возможные ответы и покажите, что других нет.)

Решение. Если изначально на доске была записана дробь $\frac{a}{b}$, то она менялась следующим образом:

$$\frac{a}{b} \rightarrow \frac{a}{a+b} \rightarrow \frac{2a+b}{a+b} \rightarrow \frac{2a+b}{3a+2b}.$$

Значит, $2a + b = 63$ и $3a + 2b = 106$, откуда $a = 20$ и $b = 23$.

Критерии. Только ответ — 1 балл.

Только ответ с проверкой, что он подходит — 2 балла (не складывается с предыдущим).

7.3. На некотором острове живёт 75 рыцарей, которые всегда говорят правду, и 75 лжецов, которые всегда лгут. Однажды все 150 человек собрались побросать друг в друга снежки. Человек, в которого попадали, немедленно уходил и больше в игре участие не принимал. В конце игры осталось 50 человек, и каждый из них заявил: «Я выбил из игры ровно одного рыцаря». Какое наибольшее количество рыцарей могло остаться среди этих 50 человек? (Найдите ответ и докажете, что он максимален.)

Решение. Заметим, что если осталось хотя бы 38 рыцарей, то выбили они ещё 38 других, то есть изначально их было уже хотя бы 76, что противоречит условию. Значит, их осталось не более 37.

Покажем, что это число достижимо. Пронумеруем рыцарей от 1 до 75, и пусть 74-й рыцарь выбил 75-го, после чего каждый из рыцарей с номерами от 1 до 37 выбил соответственно рыцаря с номером от 38 до 74. Лжецы же пусть как-то повыбивали друг друга, чтобы их осталось 13. Итого, ответом является число 37.

Критерии. Только ответ — 0 баллов.

Доказательство того, что рыцарей осталось не более 37 — 4 балла.

Верный пример на 37 рыцарей — 3 балла. Это складывается с предыдущим пунктом.

Идейно верный пример, но в нём может быть оставшийся лжец, выбивший ровно одного рыцаря — штраф 2 балла.

7.4. В музее современного искусства висит картина, представляющая собой квадрат 4×4 , сшитый из 16 лоскутов 1×1 разного цвета. Каждый посетитель музея может переделать эту картину, поменяв местами либо две строки этого квадрата, либо два столбца. Сколько всего различных вариантов этой картины могут сообщить посетители музея? Картины, отличающиеся поворотом или переворотом, считаются различными. (*Найдите ответ и обоснуйте, что он верен.*)

Решение. Заметим, что в верхний левый угол может быть поставлен любой из 16 цветов. Пусть он находился в строке i и столбце j . После этого в первой строке будут стоять те же цвета, что и в i изначально, а в первом столбце — что и в j . Переставить три оставшихся цвета в строке можно 6 способами, в столбце тоже, а после этого вся оставшаяся таблица определится однозначно. Значит, всего картин $16 \cdot 6 \cdot 6$ — 16 способов выбрать верхний левый угол, затем первую строку, затем первый столбец, и все эти способы различны. Итого, ответ равен 576.

Критерии. Только ответ — 1 балл.

7.5. На доске написана фраза из 2023 русских букв, причём каждая из 33 букв встречается хотя бы раз. Оказалось, что среди любых 99 подряд идущих букв есть хотя бы 32 различных. Докажите, что среди каких-то 100 подряд идущих букв встретятся все 33 буквы. (*Подробно обоснуйте свои рассуждения.*)

Решение. Подчеркнём в нашей фразе самую левую букву «А», самую левую «Б», ..., самую левую «Я». Рассмотрим самую правую из подчёркнутых букв. Пусть без ограничения общности это буква «Ы».

Если она стоит не дальше 100-й позиции слева, то среди первых 100 букв встречаются все (потому что там стоят все подчёркнутые буквы).

Если же первая «Ы» находится после 100-й позиции, то рассмотрим 99 букв перед ней. По условию среди них хотя бы 32 различных. При этом «Ы» среди них нет, поэтому, добавив эту букву к 99 предыдущим, получим искомую сотню, содержащую все буквы.

Критерии. Идея из первого абзаца решения — 2 балла.

Второго абзаца — 2 балла.

Третьего абзаца — 3 балла. Все эти баллы складываются.